§ 20. МАТЕМАТИЧНИЙ І ПРУЖИННИЙ МАЯТНИКИ. ЕНЕРГІЯ КОЛИВАНЬ

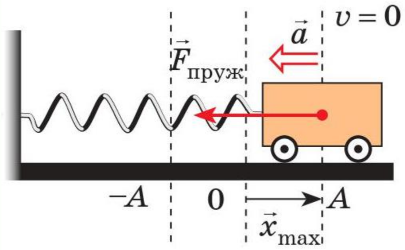
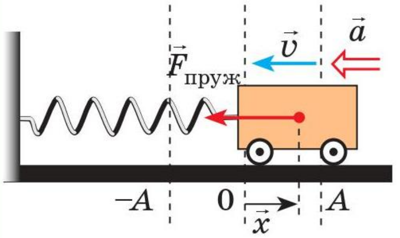
Коливальні рухи дуже різноманітні. Однак існує «класика» коливальних рухів — вони описані сотні років тому, їх вивченням займалися *Ґалілео Ґалілей* (1564–1642) і *Крістіан Гюйґенс* (1629–1695). Це — коливання пружинного та математичного маятників. Саме з коливаннями таких маятників ви ознайомитесь у цьому параграфі.

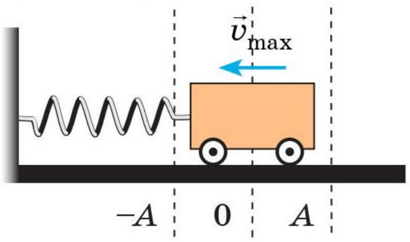
1 Коливання пружинного маятника

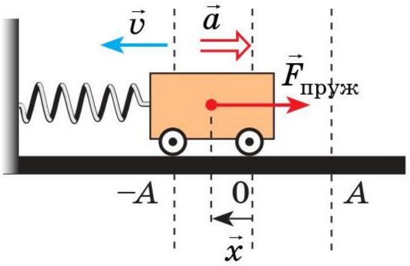
Пружинний маятник — це коливальна система, яка являє собою тіло, закріплене на пружині.

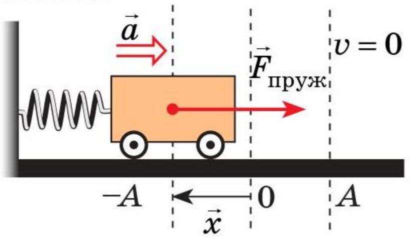
Розглянемо коливання *горизонтального пружинного маятника* — візка масою m, прикріпленого до вертикальної стіни пружиною жорсткістю k. Будемо вважати, що сили тертя, які діють у системі, нехтовно малі, тоді коливання маятника будуть незатухаючими (їх амплітуда з часом не змінюватиметься, а повна механічна енергія системи зберігатиметься). При цьому потенціальна енергія деформованої пружини буде перетворюватися на кінетичну енергію руху візка, і навпаки.

Коливання пружинного маятника

1. *Стан* максимального відхилення від положення рівноваги  $v=0$; $x=x_{max}$; $E=E_{p\,max}$	Відведемо візок на відстань x_{max} вправо від положення рівноваги — пружина розтягнена, і на візок діє сила пружності, напрямлена вліво; у даний момент ця сила максимальна: $F_{пруж}=kx_{max}$	Візок нерухомий, тому його кінетична енергія дорівнює нулю: $E_k=0$. Потенціальна енергія пружини максимальна і дорівнює повній енергії маятника: $E_p=\frac{kx_{max}^2}{2}$
2. Прискорений *рух* візка, швидкість руху збільшується  $v\uparrow$; $x\downarrow$; $F_{пруж}\downarrow\Rightarrow a\downarrow$; $E=E_k+E_p$	Відпустимо візок — під дією сили пружності він починає рухатися вліво. Сила $\vec{F}_{пруж}$ напрямлена в бік руху візка, тому швидкість його руху збільшується. Натомість видовження x пружини зменшується, тому меншатиме й сила пружності, а отже, і прискорення руху візка	Кінетична енергія візка зростає: $E_k=\frac{mv^2}{2}$. Потенціальна енергія пружини зменшується: $E_p=\frac{kx^2}{2}$. Повна енергія системи залишається незмінною і дорівнює сумі кінетичної та потенціальної енергій

<table>
<tr>
<td>3. Стан рівноваги


$F_{пруж} = 0$; $a = 0$; $v = v_{max}$;
$x = 0$; $E = E_{k\,max}$</td>
<td>Через час, який дорівнює чверті періоду $(t = T/4)$, візок доходить до положення рівноваги. У цей момент сила пружності та прискорення дорівнюють нулю, а швидкість руху візка сягає максимального значення</td>
<td>Потенціальна енергія пружини дорівнює нулю: $E_p = 0$.
Кінетична енергія візка максимальна й дорівнює повній енергії системи:
$E_k = \dfrac{mv_{max}^2}{2}$</td>
</tr>
<tr>
<td>4. Сповільнений рух візка, швидкість руху зменшується


$v\downarrow$; $x\uparrow$; $F_{пруж}\uparrow \Rightarrow a\uparrow$;
$E = E_k + E_p$</td>
<td>Досягнувши положення рівноваги, візок не зупиняється, а внаслідок інертності продовжує рух вліво.
Пружина починає стискатися, і зростаюча сила пружності гальмує рух візка</td>
<td>Кінетична енергія візка зменшується:
$E_k = \dfrac{mv^2}{2}$.
Потенціальна енергія пружини зростає:
$E_p = \dfrac{kx^2}{2}$.
Повна енергія системи дорівнює сумі кінетичної та потенціальної енергій</td>
</tr>
<tr>
<td>5. Стан максимального відхилення від положення рівноваги


$v = 0$; $|x| = x_{max}$;
$F_{пруж} = kx_{max}$; $E = E_{p\,max}$</td>
<td>Досягнувши точки повороту (максимального відхилення від положення рівноваги), візок на мить зупиняється. У цей момент сила пружності сягає максимального значення. Від моменту початку коливання пройшла половина періоду $(t = T/2)$</td>
<td>Візок нерухомий, тому його кінетична енергія дорівнює нулю: $E_k = 0$.
Потенціальна енергія пружини максимальна і дорівнює повній енергії маятника:
$E_p = \dfrac{kx_{max}^2}{2}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Наступну половину періоду характер руху візка буде таким самим, тільки у зворотному напрямку: візок почне рухатися вправо до положення рівноваги, збільшуючи швидкість; через час $t = \dfrac{3}{4}T$ від початку коливання він пройде положення рівноваги й далі знову відхилиться на відстань x_{max}. Так завершиться одне повне коливання $(t = T)$. Далі все повториться.</td>
</tr>
</table>

Зверніть увагу! Протягом усього часу коливання сила пружності напрямлена в бік, протилежний зміщенню візка, — весь час сила пружності «штовхає» візок до положення рівноваги.

Отже, *вільні коливання пружинного маятника мають такі причини*:

1) *сила, що діє на тіло, завжди напрямлена до положення рівноваги*;

2) *тіло, що коливається, є інертним*, тому воно не зупиняється в положенні рівноваги (коли рівнодійна сил стає рівною нулю), а продовжує рух у тому самому напрямку.

2 Як визначити період коливань пружинного маятника

Розглянемо коливання візка, закріпленого на горизонтальній пружині, з точки зору другого закону Ньютона (рис. 20.1). Запишемо рівняння другого закону Ньютона у векторному вигляді: $\vec{F}_{\text{пруж}} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$.

Сила тяжіння та сила нормальної реакції опори зрівноважують одна одну, тому $\vec{F}_{\text{пруж}} = m\vec{a}$. Спроектувавши це рівняння на вісь OX $\left(F_{\text{пруж}\,x} = ma_x\right)$ і скориставшись законом Гука $\left(F_{\text{пруж}\,x} = -kx\right)$, отримаємо: $a_x = -\dfrac{k}{m}x$.

Бачимо, що це рівняння можна записати у вигляді $a_x = -\omega^2 x$. Таким чином, *коливання візка на пружині є гармонічними коливаннями*, а циклічна частота цих коливань становить: $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

Узявши до уваги, що $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, отримаємо **формулу для обчислення періоду коливань пружинного маятника:**

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

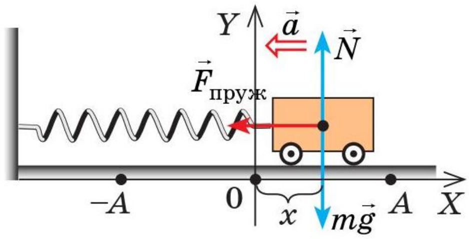


Рис. 20.1. На візок, відхилений від положення рівноваги, діють три сили: сила реакції опори $\vec{N}$, сила тяжіння $m\vec{g}$ і сила пружності $\vec{F}_{\text{пруж}}$

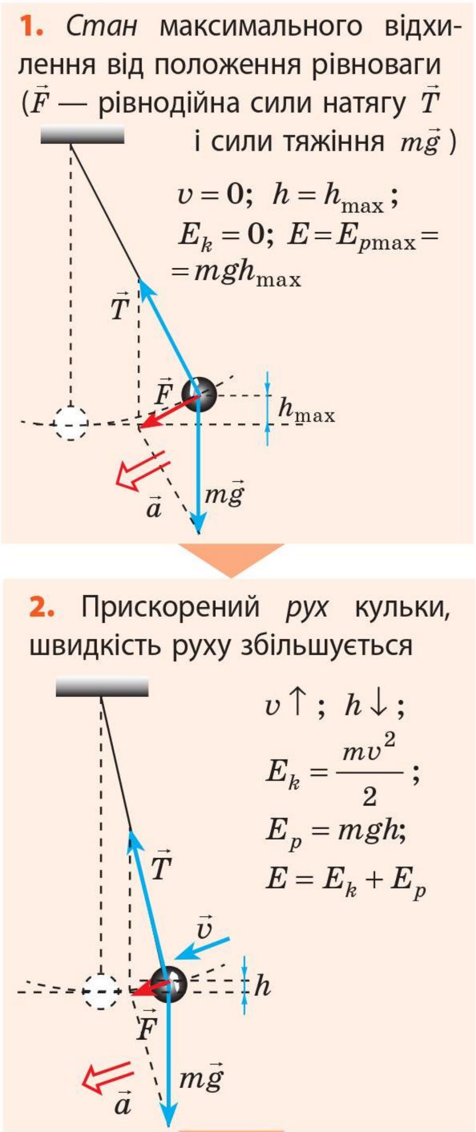
Зверніть увагу! Період коливань пружинного маятника не залежить ані від амплітуди коливань, ані від того, де відбуваються ці коливання (на поверхні Землі, у космічному кораблі чи на поверхні Місяця), — він *визначається тільки власними характеристиками коливальної системи «тіло — пружина»*. Якщо період T коливань тіла та жорсткість k пружини відомі, можна знайти масу m тіла. Такий спосіб визначення маси використовують у стані невагомості, коли звичайні ваги не працюють.

3 Що називають математичним маятником

Будь-яке тверде тіло, яке здійснює або може здійснювати коливання відносно осі, що проходить через точку підвісу, називають *фізичним маятником*. Прикладом може слугувати іграшка, підвішена на нитці в салоні автомобіля. Якщо іграшку вивести з положення рівноваги, вона почне коливатися. Проте вивчати такі коливання доволі складно: їх характер визначається розмірами та формою іграшки, властивостями нитки та іншими чинниками.

Щоб розміри тіла не впливали на характер його коливань, слід узяти нитку, довжина якої набагато більша за розміри тіла, а маса незначна порівняно з його масою. У такому випадку тіло можна вважати *матеріальною точкою*. А щоб під час коливань тіло весь час перебувало на однаковій відстані від точки підвісу, нитка має бути нерозтяжною. У такий спосіб буде створено *фізичну модель — математичний маятник*.

Математичний маятник — це фізична модель коливальної системи, яка складається з матеріальної точки, підвішеної на невагомій і нерозтяжній нитці, та гравітаційного поля.



4 Коливання математичного маятника

Візьмемо невелику, але досить важку кульку та підвісимо її на довгій нерозтяжній нитці — такий маятник можна вважати математичним. Якщо відхилити кульку від положення рівноваги та відпустити, то внаслідок дії гравітаційного поля Землі (сили тяжіння) та сили натягу нитки кулька почне коливатися біля положення рівноваги. Оскільки опір повітря нехтовно малий, а сили, що діють у системі, є консервативними, повна механічна енергія кульки буде зберігатися. При цьому потенціальна енергія піднятої кульки буде перетворюватися на її кінетичну енергію, і навпаки.

? Розгляньте коливальний рух кульки (рис. 20.2), поясніть причини її руху та з'ясуйте, які перетворення енергії відбуваються.

5 Як обчислити період коливань математичного маятника

Можна довести, що *математичний маятник, відхилений від положення рівноваги на невеликий кут* (3–5°), *здійснюватиме гармонічні коливання*, тобто прискорення його руху весь час буде прямо пропорційне зміщенню та напрямлене в бік, протилежний зміщенню: $a_x = -\omega^2 x$.

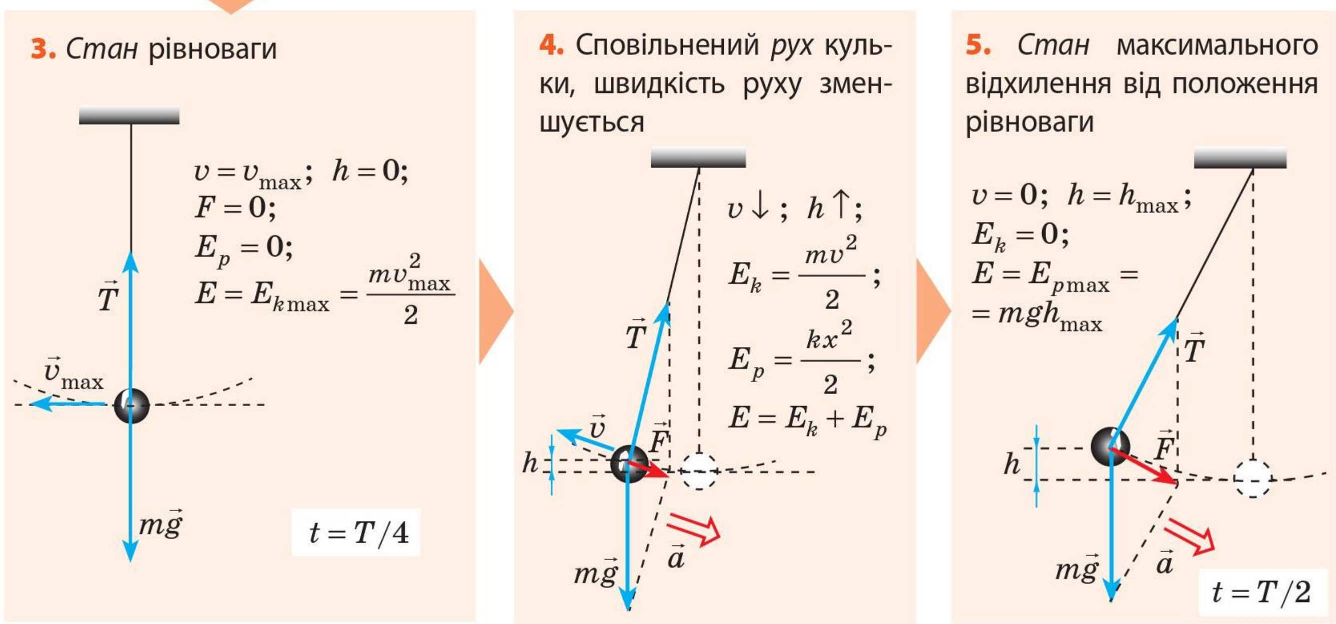


Рис. 20.2. Коливання математичного маятника є вільними, оскільки відбуваються під дією внутрішніх сил системи. Причини, завдяки яким математичний маятник здійснює вільні коливання, ті самі, що й у випадку коливань пружинного маятника: 1) рівнодійна сил, прикладених до тіла, завжди напрямлена до положення рівноваги; 2) тіло, що коливається, є інертним

Для математичного маятника $\omega^2 = \frac{g}{l}$, тому циклічна частота $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Отже, **період коливань математичного маятника** обчислюють за формулою:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

де l — довжина маятника; g — прискорення вільного падіння.

Цю формулу вперше одержав у XVII ст. голландський учений *Крістіан Гюйґенс*, тому її називають **формулою Гюйґенса**.

Період коливань математичного маятника не залежить від маси маятника, а визначається лише довжиною нитки та прискоренням вільного падіння в тому місці, де розташований цей маятник. Тому, вимірявши довжину нитки та період коливань маятника, можна визначити прискорення вільного падіння в даній місцевості (див. лабораторну роботу № 5).

6 Учимося розв'язувати задачі

Задача. Рівняння коливань тягаря на пружині має вигляд: $x = 10\cos 2\pi t$ (см). Знайдіть повну механічну енергію коливань, найбільшу швидкість руху тягаря, кінетичну та потенціальну енергії системи через $\frac{1}{6}$ с після початку відліку часу. Маса тягаря — 1 кг. Систему вважайте замкненою.

Дано:
$x = 0{,}10\cos 2\pi t$ (м)
$t = \frac{1}{6}$ с
$m = 1{,}0$ кг

E — ? $v_{\max}$ — ?
E_k — ? E_p — ?

Аналіз фізичної проблеми, розв'язання. Система замкнена, тому справджується закон збереження повної механічної енергії:

$$E = \frac{kA^2}{2} = \frac{mv_{\max}^2}{2} = E_k + E_p.$$

Зіставимо рівняння коливань у загальному вигляді з рівнянням, наведеним у задачі: $\left.\begin{matrix} x = A\cos\omega t, \\ x = 0{,}1\cos 2\pi t \end{matrix}\right| \Rightarrow A = 0{,}1$ м; $\omega = 2\pi$ с$^{-1}$.

Оскільки $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, то $k = \omega^2 m = 4\pi^2 \cdot 1 \approx 40$ (Н/м); $E = E_{p\max} = \frac{kA^2}{2} = 0{,}20$ (Дж);

$$\frac{kA^2}{2} = \frac{mv_{\max}^2}{2} \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{kA^2}{m}} = A\sqrt{\frac{k}{m}} = A\omega = 0{,}1 \cdot 2\pi \approx 0{,}63 \text{ (м/с)}.$$

Визначивши видовження пружини через $t = \frac{1}{6}$ с, обчислимо потенціальну і кінетичну енергії пружини: $x = 0{,}1\cos 2\pi t = 0{,}1\cos 2\pi \cdot \frac{1}{6} = 0{,}1\cos\frac{\pi}{3} = 0{,}05$ (м);

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{40 \cdot 0{,}0025}{2} = 0{,}05 \text{ (Дж)}; \; E = E_k + E_p \Rightarrow E_k = E - E_p = 0{,}20 - 0{,}05 = 0{,}15 \text{ (Дж)}.$$

Відповідь: $E = 0{,}20$ Дж; $v_{\max} = 0{,}63$ м/с; $E_k = 0{,}15$ Дж; $E_p = 0{,}05$ Дж.

Підбиваємо підсумки

- Пружинний маятник — коливальна система, яка являє собою тіло, закріплене на пружині. Період вільних коливань пружинного маятника не залежить від амплітуди коливань і визначається за формулою: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

• Математичний маятник — це фізична модель коливальної системи, яка складається з матеріальної точки, що підвішена на невагомій і нерозтяжній нитці, та гравітаційного поля. Період коливань математичного маятника не залежить від його маси та амплітуди коливань і визначається за формулою: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

• У ході вільних коливань маятника його потенціальна та кінетична енергії безперервно змінюються. Потенціальна енергія є максимальною в точках повороту й дорівнює нулю в момент проходження маятником положення рівноваги. Кінетична енергія в точках повороту дорівнює нулю й сягає максимального значення в момент проходження маятником положення рівноваги.

Контрольні запитання

1. Опишіть коливання пружинного маятника. Чому тіло не зупиняється, коли проходить положення рівноваги? **2.** За якою формулою визначають період коливань пружинного маятника? **3.** Дайте означення математичного маятника. **4.** Опишіть коливання математичного маятника. За якою формулою визначають період його коливань? **5.** Які перетворення енергії відбуваються під час коливань пружинного маятника? математичного маятника? **6.** У якому положенні потенціальна енергія маятника сягає максимального значення? мінімального? Що можна сказати про кінетичну енергію маятника в ці моменти?

Вправа № 20

1. У системі «візок — пружина» відбуваються вільні коливання. Збільшиться чи зменшиться період цих коливань, якщо: 1) збільшити амплітуду коливань? 2) зменшити масу візка? 3) збільшити жорсткість пружини?
2. Чи відбуватимуться коливання математичного маятника в невагомості? Відповідь обґрунтуйте.
3. Як зміниться хід маятникового годинника, якщо його з теплої кімнати винести в холодну комору? підняти з першого поверху хмарочоса на дах?
4. Якою є маса тіла, підвішеного на пружині жорсткістю 40 Н/м, якщо після відхилення тіла від положення рівноваги воно здійснює 8 коливань за 12 с?
5. На яку максимальну висоту відхиляється математичний маятник, якщо в момент проходження положення рівноваги він рухається зі швидкістю 0,2 м/с? Якою є довжина маятника, якщо період його коливань — 2 с?
6. Рівняння коливань пружинного маятника масою 5 кг має вигляд: $x = 0{,}2\cos 10\pi t$. Визначте: 1) циклічну частоту та період коливань маятника; 2) жорсткість пружини маятника; 3) повну механічну енергію коливань; 4) зміщення, кінетичну та потенціальну енергії маятника через 0,025 с.
7. Спостерігаючи коливання великої люстри в Пізанському кафедральному соборі, яка розгойдувалася через протяг, Ґ. Ґалілей виміряв період її коливань і встановив... Скористайтеся додатковими джерелами інформації та дізнайтеся: 1) що встановив Ґ. Ґалілей; 2) як він вимірював період коливань без годинника; 3) яким є період коливань великої люстри (для цього знайдіть інформацію про довжину підвісу).

Експериментальне завдання

Виготовте маятник, закріпивши на довгій нитці достатньо важке тіло, і виміряйте прискорення вільного падіння у вашому будинку. Переконайтеся, що воно дійсно приблизно дорівнює 9,8 м/с^2.