

Похідна функції

Дія знаходження похідної функції називається диференціюванням.

Результатом цієї дії є також функція.

Правила диференціювання:

1) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ – похідна суми дорівнює сумі похідних;

2) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$ – похідна добутку;

3) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}$ – похідна частки;

4) $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$ – сталий множник виносимо за знак похідної.

!! Таблиця похідних (повторіть самостійно)

1. Знайдіть похідну функції (зразки розв'язання):

a) $f(x) = x^6 - x$; $f'(x) = 6x^5 - 1$;

б) $f(x) = \frac{1}{2}x^6 + 2x^3$; $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 6x^5 + 2 \cdot 3x^2 = 3x^5 + 6x^2$;

в) $f(x) = \frac{x^2 + 5x}{x - 2}$; $f'(x) = \frac{(x^2 + 5x)'(x - 2) - (x - 2)'(x^2 + 5x)}{(x - 2)^2} =$
 $= \frac{(2x + 5)(x - 2) - 1 \cdot (x^2 + 5x)}{(x - 2)^2} = \frac{2x^2 - 4x + \cancel{5x} - 10 - x^2 - \cancel{5x}}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 10}{(x - 2)^2}$;

г) $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$; $f'(x) = \frac{2x(x - 1) - 1 \cdot x^2}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$.

Застосування похідної

- $y = kx + b$ – рівняння прямої;
 $k = f'(x_0)$ - кутовий коефіцієнт дотичної;
 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ – загальний вигляд рівняння дотичної;
- Якщо $f'(x_0) = 0$ або не існує, то точка x_0 називається критичною (стаціонарною);
- Якщо $f'(x_0) > 0$ на деякому проміжку, то функція $f(x)$ зростає на цьому проміжку і навпаки.

Алгоритм дослідження функції на зростання чи спадання:

1. Знайти похідну функції.
2. Прирівняти знайдену похідну до нуля і розв'язати утворене рівняння.
3. Знайдені корені рівняння – це є стаціонарні точки. Нанести їх на $D(f)$ – область визначення функції.
4. Розбити $D(f)$ стаціонарними точками на інтервали.
5. Визначити знак похідної на кожному з інтервалів (беремо будь-яке число із інтервалу, підставляємо замість x у вираз похідної і обчислюємо, достатньо з'ясувати додатне чи від'ємне число одержимо)
6. Записати відповідь: там, де $f'(x) > 0$ – функція зростає, а там, де $f'(x) < 0$ – функція спадає.

Алгоритм знаходження найбільшого чи найменшого значення функції на відрізку:

1. Знайти похідну функції.
2. Прирівняти похідну до нуля і знайти стаціонарні точки.
3. Із знайдених стаціонарних точок вибрати тільки ті, які належать заданому відрізку.
4. Знайти значення функції у вибраних стаціонарних точках і обвести їх.
5. Знайти значення функції на кінцях відрізка, що заданий і обвести їх.
6. Із обведених чисел вибрати найбільше і найменше.

Вправи:

1. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$ у точці з абсцисою $x_0=3$.

Розв'язання:

Запишемо загальний вигляд рівняння дотичної:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

✧ x і y – це незалежна і залежна змінна, які в рівнянні залишаються;

✧ $x_0 = 3$ – за умовою задачі;

✧ Треба знайти:

y_0 – це значення заданої функції в точці $x_0 = 3$;

$f'(x_0)$ – значення похідної в точці $x_0 = 3$.

✧ Знайдемо спочатку y_0 . Для цього у формулу функції, що задана в умові, підставимо замість x число 3 і обчислимо:

$$y_0 = f(x_0) = 4x_0 - \frac{1}{3}x_0^3 = 4 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 3^3 = 12 - 3^2 = \boxed{3}$$

✧ Щоб знайти $f'(x_0)$ треба спочатку знайти $f'(x)$, тобто похідну заданої функції:

$$f'(x) = 4 - \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = 4 - x^2;$$

$$f'(x_0) = 4 - x_0^2 = 4 - 3^2 = 4 - 9 = \boxed{-5}$$

✧ Тепер підставимо знайдені числа у загальний вигляд рівняння дотичної:

$$y - 3 = -5(x - 3)$$

Зведемо рівняння до вигляду: $y = kx + b$

$$y - 3 = -5x + 15;$$

$$y = -5x + 15 + 3;$$

$$y = -5x + 18.$$

Відповідь: $y = -5x + 18$.

4. Знайдіть проміжки зростання функції $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Розв'язання:

(за алгоритмом)

1. $f'(x) = 3x^2 - 6x$;

2. $3x^2 - 6x = 0$;

$$3x(x - 2) = 0;$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2$$

3. $D(f) \in \mathbb{R}$

4.



$$5. f'(-1) = 3 \cdot (-1) \cdot (-1-2) = -3 \cdot (-3) = 9 > 0;$$

$$f'(1) = 3 \cdot 1 \cdot (1-2) = 3 \cdot (-1) = -3 < 0;$$

$$f'(3) = 3 \cdot 3 \cdot (3-2) = 3 \cdot 3 \cdot 1 = 9 > 0.$$

6. *Відповідь:* Функція зростає на кожному з проміжків $(-\infty; 0]; [2; \infty)$.

7. Чому дорівнює найменше значення функції $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ на проміжку $[2; 4]$?

Розв'язання:
(за алгоритмом)

$$1. f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3 = \frac{3}{2}x^2 - 4x + 3;$$

$$2. \frac{3}{2}x^2 - 4x + 3 = 0; \quad D = 16 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 < 0$$

3.]

4.] Стаціонарних точок не існує.

$$5. f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 5 = \frac{8}{2} - 8 + 6 - 5 = \boxed{-3};$$

$$f(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^3 - 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 - 5 = 32 - 32 + 12 - 5 = \boxed{7}.$$

6. *Відповідь:* $f_{\min}_{[2;4]} = f(2) = -3.$

9. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 0,2x^2 + 4x - 5$, яка паралельна прямій $y = 6x - 3$.

Розв'язання:

Запишемо загальний вигляд рівняння дотичної:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Для цього рівняння треба знайти:

$$1) f'(x_0) - ?$$

$$2) x_0 - ?$$

$$3) y_0 - ?$$

- Відомо, що $f'(x_0) = k$ – кутовий коефіцієнт прямої і що паралельні прямі мають однакові кутові коефіцієнти. З рівняння прямої $y = 6x - 3$ маємо, що $k = 6$, отже, $f'(x_0) = 6$.
- Для того, щоб знайти x_0 знайдемо спочатку $f'(x)$:

$$f'(x) = 0,2 \cdot 2x + 4;$$

$$f'(x) = 0,4x + 4.$$

- Підставимо x_0 у знайдений вираз замість x :

$$f'(x_0) = 0,4x_0 + 4$$

Ми вже знаємо, що $f'(x_0) = 6$, тому підставимо його: $6 = 0,4x_0 + 4$;

$$0,4x_0 = 6 - 4;$$

$$0,4x_0 = 2;$$

$$x_0 = 5$$

- Тепер знайдемо y_0 , підставивши $x_0 = 5$ у формулу заданої функції:

$$y_0 = f(x_0) = 0,2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 - 5 = 0,2 \cdot 25 + 20 - 5 = \boxed{20}.$$

- Тепер підставимо знайдені числа у загальний вигляд рівняння дотичної:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0);$$

$$y - 20 = 6(x - 5);$$

$$y - 20 = 6x - 30;$$

$$y = 6x - 30 + 20;$$

$$y = 6x - 10.$$

Відповідь: $y = 6x - 10$.